РЕСПУБЛИКАНСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ НА КУБОК имени Ю.А. ГАГАРИНА

2020-2021 учебный год

КУБОК ГАГАРИНА олимпиада школьников

МАТЕМАТИКА

ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП

7 класс

Максимальное количество баллов за задания:

Задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Сумма
Количество баллов	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	36

Все оценки должны быть целыми числами, дробные оценки не допускаются!

ОТВЕТЫ И РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ ПРОВЕРКИ

1. *Обоснованный ответ 2 балла. За ответ без объяснения 0 баллов. Максимально 2 балла*

Нет — Можно ехать единственным способом: 20-7-15-2-10-18-5-13, а с 13 этажа уехать нельзя.

2. *1 балл за правильный ответ + 1 балл за верное решение. Максимально 2 балла*

6 — Дополним фигуру до прямоугольного параллелепипеда второй такой же фигурой. Значит, объём фигуры равен половине от объёма параллелепипеда со сторонами 2, 2 и 3.

3. *1 балл за правильный ответ + 1 балл за верное решение. Максимально 2 балла*

5 — Уменьшаемое оканчивается на 0, а вычитаемое – на 5, так как оно нечётное и делится на 5.

4. *1 балл за правильный ответ + 1 балл за верное решение. Максимально 2 балла*

4 ведра — Из условий задачи следует, что вместимость двух больших ведер равна общей вместимости 4 маленьких и двух средних ведер. Следовательно, вместимость одного большого ведра равна вместимости 2 маленьких и одного среднего ведра. Тогда шесть маленьких и три средних ведра можно заменить 3 большими ведрами, и в бочку, таким образом, вмещается 4 больших ведра воды.

5. *3 балла за правильный обоснованный ответ. Ответ без объяснения единственности 1 балл. Максимально 3 балла*

9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 — Заметим, что из семи последовательных чисел 5-е на три больше, чем 2-е; 6-е на три больше чем 3-е, а 7-е на три больше, чем 4-е. Следовательно, сумма 2-го, 3-го и 4-го чисел на 9 меньше, чем 5-го, 6-го и 7-го. Для равенства добавляется лишь первое число. Значит, оно равно 9. Таким образом единственный возможный вариант – это числа 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15.

6. *3 балла за правильный ответ с решением. Ответ без решения 0 баллов. Максимально 3 балла*

Не может. Заметим, что прибавление к знаменателю и вычитание из числителя единицы уменьшает дробь, а остальные действия не изменяют значение дроби. Но $\frac{32}{49} < \frac{2}{3}$, значит, никак $\frac{2}{3}$ не получить.

7. *1 балл за правильный ответ + 2 балла за верное решение. Максимально 3 балла*

0 Если 0 являются корнем уравнения, тогда $a \cdot 0 + b = c \cdot 0 + d$, откуда получаем, что $b = d$. В этом случае получаем уравнение $ax = cx$, равносильное первоначальному. Число (-1) является корнем этого уравнения, значит $a \cdot (-1) = c \cdot (-1)$, откуда получаем, что $a = c$. Следовательно, $a - c = 0$.

8. *1 балл за правильный ответ + 2 балла за верное решение. Максимально 3 балла*

20 способов По правилу произведения в комбинаторике $5! : 3! = 20$ способов.

9. *Обоснованный правильный ответ 4 балла. За получение цикла 1 балл, за ответ без полного решения 1 балл (баллы могут суммироваться). Максимально 4 балла*

36 Посмотрим, что будет получаться после первых нескольких раз: 38, 44, 36, 38, 44, 36, 38 и т. д. Получается цикл длиной 3. Значит, после 60-й минуты на доске будет 36.

10. *Обоснованный правильный ответ 4 балла. Только ответ 2 балла. Максимально 4 балла*

24 маленькие баночки. Предположим, что Винни-Пух купил бы все большие баночки. Тогда у него вышло бы $29 \times 74 = 2146$ рублей. За каждую замену большой баночки на маленькую сумма уменьшается на 12 рублей. Заменив 24 большие баночки на маленькие, мы получим $2146 - 12 \times 24 = 1858$ рублей. Понятно, что ни добавить маленькую баночку, ни заменить её на большую мы не можем, т. к. иначе сумма не попадет в диапазон от 1850 до 1860 рублей.

11. *Обоснованный правильный ответ 4 балла. Только ответ 1 балл. Максимально 4 балла*

1 Для удобства обозначим ячейки таблицы так, как на рисунке. Из условия $A \cdot B \cdot C = 16$, $A \cdot B \cdot D \cdot E = 32$, откуда следует, что $D \cdot E = 2 \cdot C$. Но $D \cdot E \cdot F = 16$, значит, $2 \cdot C \cdot F = 16$, откуда $C \cdot F = 8$. А так как $C \cdot F \cdot I = 16$, то $I = 2$. В силу симметрии числа во всех угловых клетках равны 2, значит $B = D = F = H = 4$, следовательно, $E = 1$.

A	B	C
D	E	F
G	H	I

12. *По 2 балла за пример и оценку. Максимально 4 балла*

11 В крайнем случае девочки в классе имеют соответственно 0, 1, 2, ..., n друзей. У последней n-той девочки друзьями будут все мальчики класса. Тогда девочек будет на 1 больше, чем максимальное количество возможных друзей-мальчиков. Вспомним про суммарное ограничение: $n + (n-1) = 21$, откуда $n = 11$.